APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN

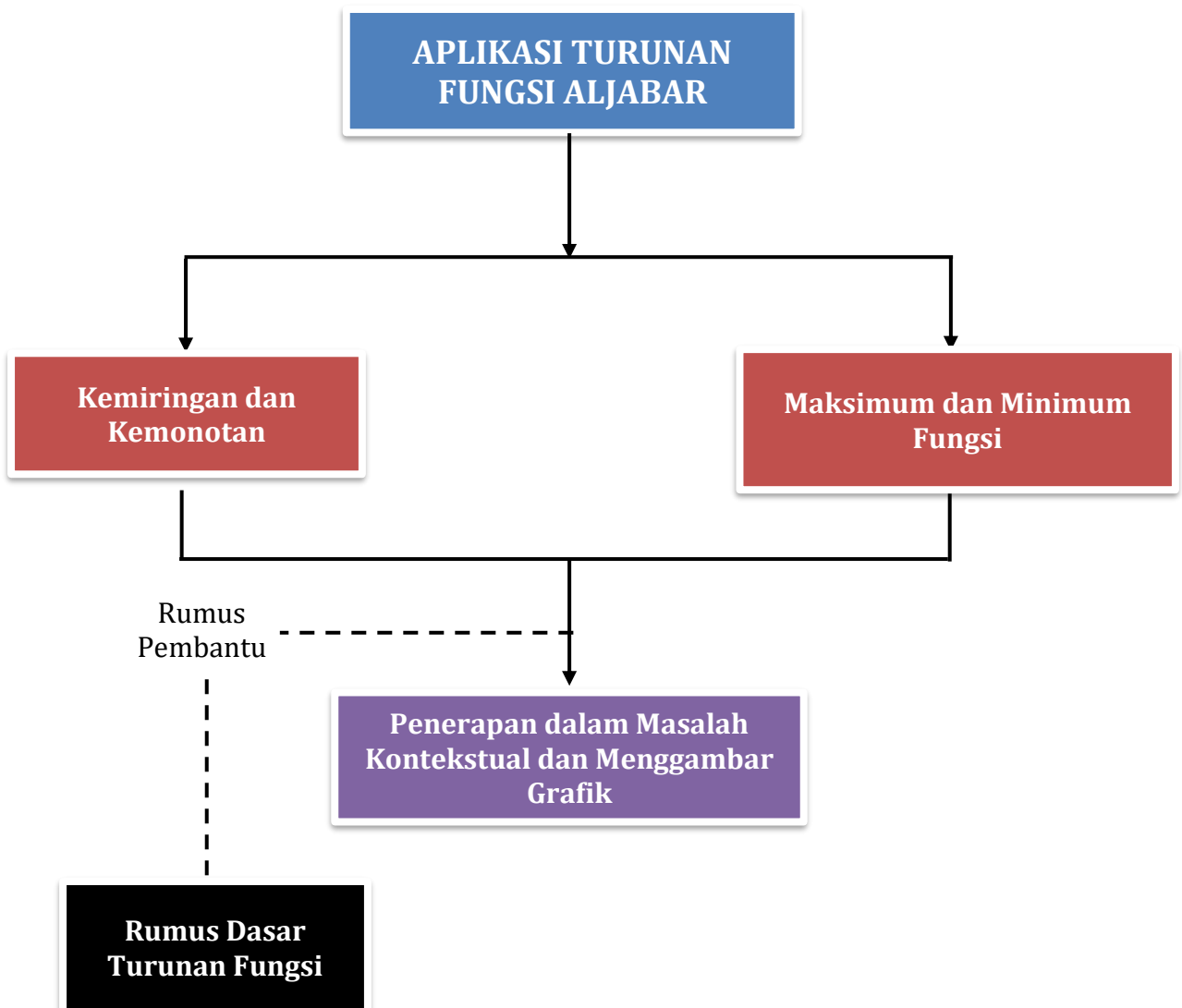
Dr. Yuyun Sri Yuniarti, M.Pd.
SMA Negeri 1 Pedes
Kabupaten Karawang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Fungsi naik	:	Sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik
Fungsi turun	:	Sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun
Gradien	:	Kemiringan, ukuran seberapa cepat nilai fungsinya berubah; nilai turunan fungsi di titik singgungnya
Garis singgung	:	Kurva bidang pada titik yang diketahui ialah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut
Garis normal	:	Garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung
Nilai maksimum	:	Nilai terbesar dari suatu fungsi pada interval tertentu
Nilai minimum	:	Nilai terkecil dari suatu fungsi pada interval tertentu
Titik stasioner	:	Titik pada kurva yang mengakibatkan kurva tersebut tidak naik dan tidak turun.
Turunan	:	Laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.

PETA KONSEP

APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR
Kemiringan dan Kemonotan
Maksimum dan Minimum Fungsi
Rumus Pembantu
Penerapan dalam Masalah Kontekstual dan Menggambar Grafik
Rumus Dasar Turunan Fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	12 JP
Judul Modul	:	Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar

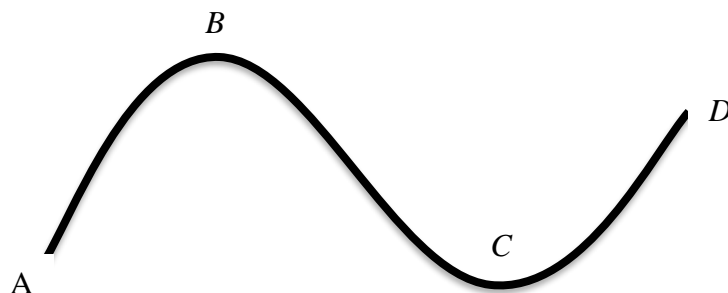
B. Kompetensi Dasar

3.9 Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum dan selang kemonotonan fungsi serta kemiringan garis singgung.

4.9 Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual

C. Deskripsi Singkat Materi

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva. Untuk memahami apa yang akan Ananda pelajari dalam modul ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Coba bayangkan ketika Ananda mendaki gunung. Ananda akan memulainya di kaki gunung, kemudian perlahan bergerak ke atas sampai tiba di puncak gunung. Ketika berada di puncak gunung Ananda merasa berada di titik paling atas bukan? Nahh setelah itu Ananda turun kembali menuju lembah sampai tiba di kaki gunung kembali. Pergerakan Ananda mendaki gunung dapat diilustrasikan dengan gambar sebagai berikut:

Gambar 1 Ilustrasi fungsi naik dan turun

Dari ilustrasi tersebut, ketika Ananda bergerak dari titik A menuju ke titik B, Ananda akan bergerak naik hingga sampai puncak, kemudian Ananda bergerak dari titik B ke titik C, pergerakan Ananda akan turun, demikian juga ketika Ananda bergerak dari titik C ke D Ananda akan bergerak naik. Deskripsi ini menggambarkan fungsi naik untuk pergerakan dari A ke B, fungsi turun untuk pergerakan dari B ke C. Dari Gambar tersebut juga dapat kita lihat terdapat puncak dan lembah. Nahh ketika Ananda berada di puncak berarti Ananda akan berada di titik maksimum, demikian juga ketika Ananda berada di bawah akan berada di titik minimum. Inilah yang disebut titik ekstrim atau titik puncak yang bisa berarti maksimum atau minimum.

Terdapat berbagai pemanfaatan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.
- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan,terdapat juga pada quick count. Dalam perhitungan tersebut,terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.
- Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Ananda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Ananda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Ananda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Ananda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Ananda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 3 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Aljabar
Kedua : Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar
Ketiga : Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi aljabar dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva dan selang kemonotonan fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

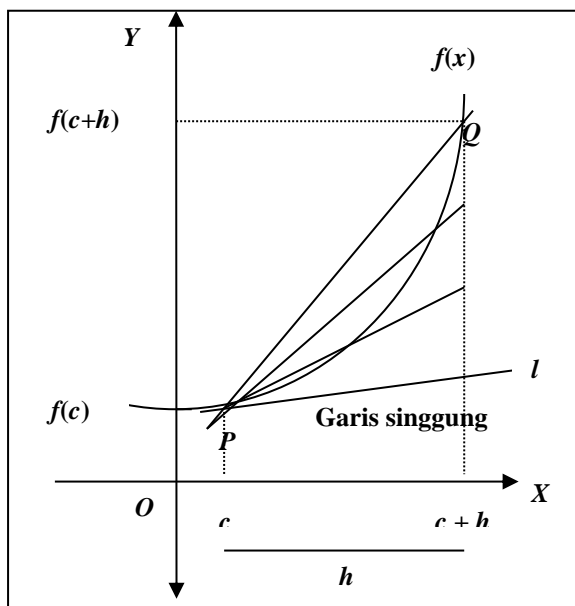
Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar ada materi prasyarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar beserta sifat-sifatnya.

Rumus Turunan Fungsi Aljabar serta Sifat-sifatnya

Misalkan f, u, dan v fungsi dari x bernilai real serta dapat diturunkan dan a konstanta bilangan real, maka berlaku:

- $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$
- $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$
- $f(x) = au^n \Rightarrow f'(x) = an\,u^{n-1}.\,u'$
- $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- $f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$
- $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!

Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

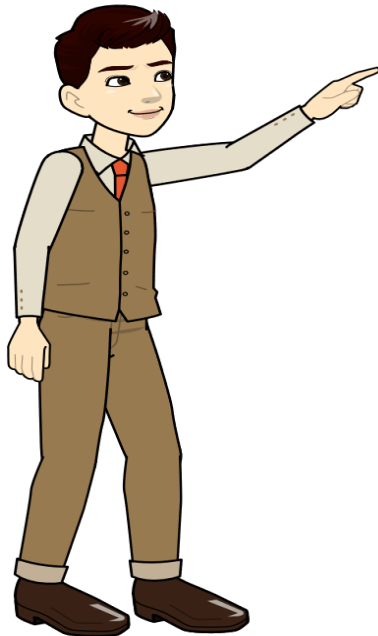
Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P. Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$m = f'(c) = \lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.

Catatan:
Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- ❖ Misalkan garis g: $y = m_1x + c_1$ sejajar garis h: $y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 = m_2$.
- ❖ Misalkan garis g: $y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis h: $y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^2 + 2x - 2$ di titik (1, 1).

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y

  $y = x^2 + 2x - 2$

  $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$
- ❖ Tentukan gradien garis singgung m

  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

  $m = 2(1) + 2 = 4$
- ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2 .

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1.

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

  Absis = $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

  $= 2(1)^3 - 5(1)^2 - (1) + 6$

  $= 2$

  Jadi, titik singgungnya adalah (1, 2).

❖ Tentukan turunan pertama fungsi y
$y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$, maka
$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x - 1$

❖ Tentukan gradien m
$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
$= 6(1)^2 - 10(1) - 1$
$= -5$

❖ Tentukan persamaan garis singgung
$y - y_1 = m\,(x - x_1)$
$\Leftrightarrow y - 2 = -5(x - 1)$
$\Leftrightarrow y - 2 = -5x + 5$
$\Leftrightarrow 5x + y - 7 = 0$

❖ Tentukan persamaan garis normal
$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$
$\Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 1)$
$\Leftrightarrow 5y - 10 = -x + 1$
$\Leftrightarrow x + 5y - 11 = 0$

❖ Kesimpulan
Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah $5x + y - 7 = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $x + 5y - 11 = 0$.

Contoh 3

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi y
$y = x^2 + 3$
$\frac{dy}{dx} = 2x$

❖ Tentukan gradien garis singgung
Misal garis h: $x + 2y + 2 = 0$
$$y = -\tfrac{1}{2}x - 1 \Rightarrow m_h = -\tfrac{1}{2}$$
Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka
$m_g \,.\, m_h = -1$
$m_g \,.\, (-\tfrac{1}{2}) = -1$
$m_g = 2$

❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
$m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$
$2 = 2x$
$x = 1$
$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^2 + 3 = 4$
Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (1, 4)$

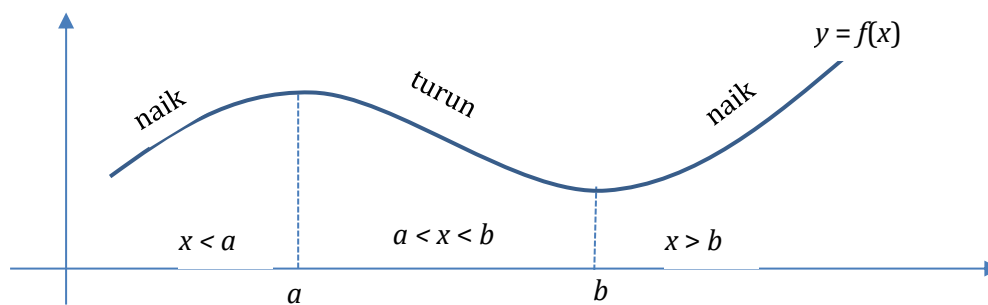
❖ Tentukan persamaan garis singgung
$y - y_1 = m_g\,(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 4 = 2(x - 1)$
$\Leftrightarrow y = 2x + 2$

❖ Kesimpulan

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$ adalah $y = 2x + 2$.

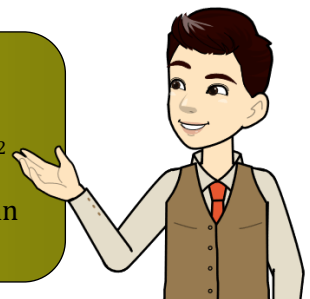
Kemonotan Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Ananda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Ananda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.

Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

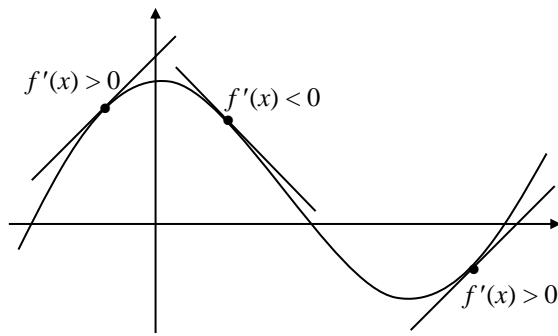
Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I.

- Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3, jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Ananda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.

Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi aljabar, pelajari contoh berikut.

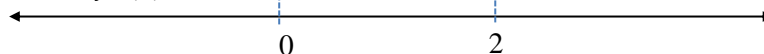
Contoh 4

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$, maka
  $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$
  $\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

$f'(-1) = 9$	$f'(1) = -3$	$f'(3) = 9$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

0 2

- Kesimpulan
  - syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < 0$ atau $x > 2$
  - syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $0 < x < 2$.

Contoh 5

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Penyelesaian

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$, menggunakan aturan pembagian, diperoleh

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

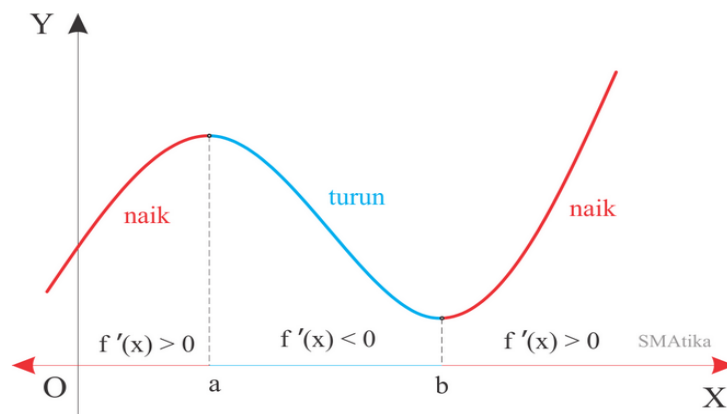
$$= \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

- Tentukan titik-titik kritis
  - Titik stasioner $f'(x) = 0$
    $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$
    $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 3$
  - Titik singular
    $\Leftrightarrow (x - 1) \neq 0$
    $\Leftrightarrow x \neq 1$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

$f'(-2) = \frac{5}{9}$, $f'(x) > 0$	$f'(0) = -3$, $f'(x) < 0$	$f'(2) = -3$, $f'(x) < 0$	$f'(4) = \frac{5}{9}$, $f'(x) > 0$
-1	1	3	

- Kesimpulan
  - syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < -1$ atau $x > 3$
  - syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$.

C. Rangkuman

- Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$
- Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I.
  - Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.
  - Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
  - Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 2$ di titik (1, 1) adalah ....
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2
2. Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ adalah ...
   A. $5x + 2y + 5 = 0$
   B. $5x - 2y - 5 = 0$
   C. $5x + 2y - 5 = 0$
   D. $3x + 2y - 3 = 0$
   E. $3x - 2y - 3 = 0$
3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = -2x^2 + 6x + 7$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 13 = 0$ adalah ....
   A. $2x + y + 15 = 0$
   B. $2x + y - 15 = 0$
   C. $2x - y - 15 = 0$
   D. $4x - 2y + 29 = 0$
   E. $4x + 2y - 29 = 0$
4. Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + px + q$, dengan p dan q konstanta. Garis $y = -3x + 5$ menyinggung kurva itu di titik dengan absis 1. Nilai p adalah ....
   A. 5
   B. 3
   C. -2
   D. -3
   E. -5
5. Persamaan garis normal dari kurva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada titik (8, 2) adalah ....
   A. $3y - 2x + 10 = 0$
   B. $3y + 4x - 38 = 0$
   C. $6y - x + 4 = 0$
   D. $12y - x - 16 = 0$
   E. $y + 12x - 98 = 0$
6. Jika $f(x) = x^2 - 6x + 8$, maka fungsi akan naik pada interval ...
   A. $x < 3$
   B. $x > 3$
   C. $x < 6$
   D. $x > 6$
   E. $x > -3$
7. Grafik fungsi $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ turun pada interval...
   A. $-5 < x < 3$
   B. $3 < x < 5$
   C. $x < -5$ atau $x > 3$
   D. $x < -3$ atau $x > 5$
   E. $x < 3$ atau $x > 5$
8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ naik pada interval ...
   A. $x > -2$
   B. $x > 3$
   C. $x < -2$

D. $x < -2$ atau $x > 3$
E. $-2 < x < 3$

9. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ turun pada interval ...
   A. $x < 0$ atau $2 < x < 4$
   B. $x < 0$
   C. $x < 4$
   D. $x > 2$
   E. $x < 2$
10. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, maka nilai $a + b$ =..
   A. 29
   B. 16
   C. 13
   D. 3
   E. −13

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Belajar 1

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 2$ di titik (1, 1) adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi y
     $y = x^2 - 2x + 2$
     $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$
   - Tentukan gradien garis singgung m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
     $m = 2(1) - 2 = 0$
   - Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 0 .
2. Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   - Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
     Absis = $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$
     $= \frac{1}{1^2} - \sqrt{1}$
     $= 0$
     Jadi, titik singgungnya adalah (1, 0)
   - Tentukan turunan pertama fungsi y
     $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} = x^{-2} - x^{\frac{1}{2}}$, maka
     $\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
     $= -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   - Tentukan gradien m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
     $= -\frac{2}{1^3} - \frac{1}{2\sqrt{1}}$
     $= -\frac{5}{2}$
   - Tentukan persamaan garis singgung
     $y - y_1 = m(x - x_1)$
     $\Leftrightarrow y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 1)$
     $\Leftrightarrow 2y = -5x + 5$
     $\Leftrightarrow 5x + 2y - 5 = 0$
     Jadi, persamaan garis singgung yang diminta adalah $5x + 2y - 5 = 0$.

3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = -2x^2 + 6x + 7$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 13 = 0$ adalah ....

Jawaban: B

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi y
  $y = -2x^2 + 6x + 7$
  $\frac{dy}{dx} = -4x + 6$
- Tentukan gradien garis singgung
  Misal garis h: $x - 2y + 13 = 0$
  $$y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow m_h = \frac{1}{2}$$
  Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka
  $m_g \,.\, m_h = -1$
  $m_g \,.\, (\frac{1}{2}) = -1$
  $m_g = -2$
- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
  $m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$
  $-2 = -4x + 6$
  $4x = 8$
  $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -2(2)^2 + 6(2) + 7 = 11$
  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (2, 11)$
- Tentukan persamaan garis singgung
  $y - y_1 = m_g\,(x - x_1)$
  $\Leftrightarrow y - 11 = -2\,(x - 2)$
  $\Leftrightarrow y = -2x + 15$
  $\Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0$

4. Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + px + q$, dengan p dan q konstanta. Garis $y = -3x + 5$ menyinggung kurva itu di titik dengan absis 1. Nilai p adalah ….
   Jawaban: E

   Penyelesaian:

   Gradien garis $y = -3x + 5$ adalah $m = -3$.

   $y = x^2 + px + q$, maka

   $\frac{dy}{dx} = 2x + p$ dan

   $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

   $\Leftrightarrow -3 = 2(1) + p$

   $\Leftrightarrow \; p = -5$

   Jadi, nilai p adalah -5.
5. Persamaan garis normal dari kurva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada titik (8, 2) adalah ….
   Jawaban: E
   Penyelesaian

- Tentukan gradien m

  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, maka $f'(x) = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$. Karena garis melalui titik (8, 2), maka

$m = f'(8)$

$= \frac{1}{3}\, 8^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3}\, (2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3}\, (2)^{-2}$

$= \frac{1}{12}$

- Tentukan persamaan garis normal

  Garis normal dengan gradien $m = \frac{1}{12}$ dan melalui titik (8, 2) adalah

  $y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -12\,(x - 8)$

  $\Leftrightarrow y = -12x + 98$

  $\Leftrightarrow y + 12x - 98 = 0$

6. Jika $f(x) = x^2 - 6x + 8$, maka fungsi akan naik pada interval ....

   Jawaban: B

   Penyelesaian:

   Diketahui $f(x) = x^2 - 6x + 8$ maka $f'(x) = 2x - 6$

   Fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$

   Maka $2x - 6 > 0$

   $2x > 6$

   $x > 3$

7. Grafik fungsi $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ turun pada interval...

   Jawaban : A

   Penyelesaian:

   Syarat fungsi turun adalah $f'(x) < 0$ sehingga kita turunkan fungsi y pada soal diatas.

   $y' = 3x^2 + 6x - 45 < 0$ atau

   $3(x^2 + 2x - 15) < 0$

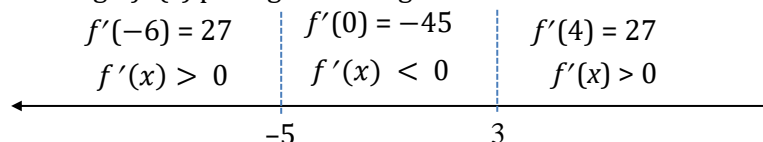
   $(x - 3)(x + 5) < 0$ agar mudah kita abaikan dulu tanda pertidaksamaannya sehingga:

   $x - 3 = 0$ atau $x + 5 = 0$.

   $x = 3$ atau $x = -5$

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

$f'(-6) = 27$	$f'(0) = -45$	$f'(4) = 27$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

   Garis bilangan dengan titik -5 dan 3.

- Kesimpulan

  syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-5 < x < 3$.

8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ naik pada interval ....

   Jawaban: D

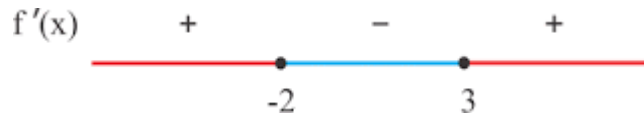
   Penyelesaian:

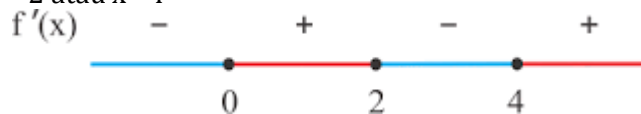
   $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

   $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

   $f(x)$ naik $\Rightarrow f'(x) > 0$

   $\Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 > 0$

Pembuat nol :
$6x^2 - 6x - 36 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2$ atau $x = 3$

Jadi $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 3$

9. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ turun pada interval ....
   Jawaban: A
   Penyelesaian:
   $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$
   $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$
   fungsi $f(x)$ akan turun jika $f'(x) < 0$
   $\Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 32x < 0$
   Pembuat nol :
   $\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
   $\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$
   $\Leftrightarrow x(x - 2)(x - 4) = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0$ atau $x - 2 = 0$ atau $x - 4 = 0$
   $\Leftrightarrow$ x = 0 atau x = 2 atau x =4

   Ambil titik di sebelah kiri 0 misalnya titik –1, maka $f'(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 8(-1)$ $= -1 - 6 - 8 = -15$ (ini bernilai < 0)
   Ambil titik di antara 0 dan 2, misalnya titik 1, maka $f'(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 8(1)$ $= 1 - 6 + 8 = 3$ (ini bernilai > nol) dst sehingga di dapat seperti pada gambar di atas.
   Jadi, $f(x)$ turun pada interval $x < 0$ atau $2 < x < 4$

10. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, maka nilai $a + b$ =..

    Jawaban: D
    Penyelesaian:
    $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
    $f(x)$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, berarti $f(x)$ naik pada $x > \frac{2}{3}$ dan $x < 8$, dan $f(x)$ stasioner pada $x = \frac{2}{3}$ dan $x = 8$.
    $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
    $f(x)$ stasioner pada $x = \frac{2}{3}$ dan $x = 8$, maka
    $f'(\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow 3(\frac{2}{3})^2 + 2a(\frac{2}{3}) + b = 0$
    $\Leftrightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{3}a + b = 0$
    $\Leftrightarrow 4 + 4a + 3b = 0$
    $\Leftrightarrow 4a + 3b = -4$ ... (i)
    $f'(8) = 0 \quad \Leftrightarrow 3(8)^2 + 2a(8) + b = 0$

$\Leftrightarrow 192 + 16a + b = 0$

$\Leftrightarrow 16a + b = -192$ ... (ii)

Eliminasi (i) dan (ii) diperoleh

$$\begin{array}{l|c|l} 4a + 3b = -4 & \times 4 & 16a + 12b = -16 \\ 16a + b = -192 & \times 1 & 16a + b = -192 \; - \\ \hline & & 11b = 176 \\ & & \Leftrightarrow \; b = 16 \end{array}$$

Substitusi $b = 16$ ke persamaan (i), diperoleh

$4a + 3b = -4 \Leftrightarrow 4a + 3(16) = -4 \Leftrightarrow a = -13$

Jadi, nilai $a + b = 3$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	**Tidak**
1.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi aljabar ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan kemiringan garis singgung suatu kurva ?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis singgung pada fungsi aljabar?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis normal pada fungsi aljabar?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi naik pada fungsi aljabar ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi turun pada fungsi aljabar ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar

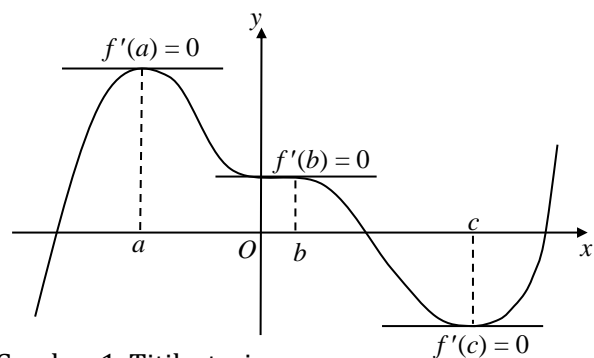
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum dan nilai minimum dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum berkaitan dengan masalah kontekstual.

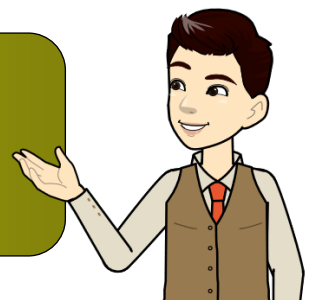
B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Aljabar

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar disamping.

Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:

Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

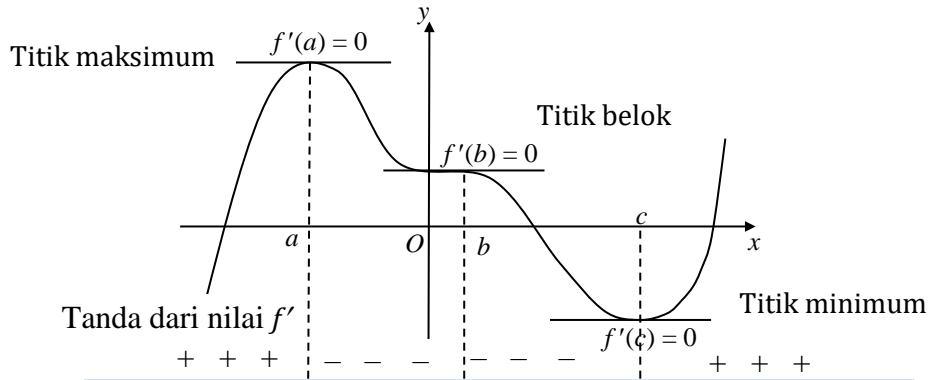
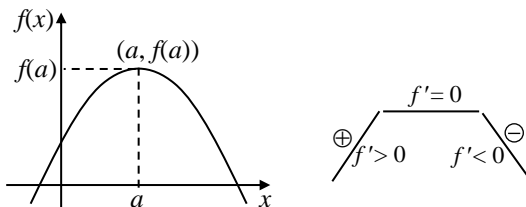
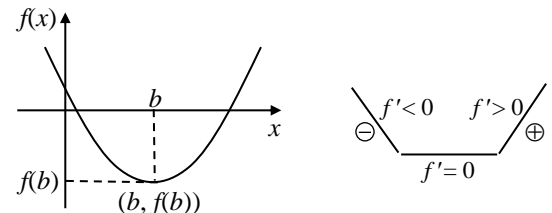
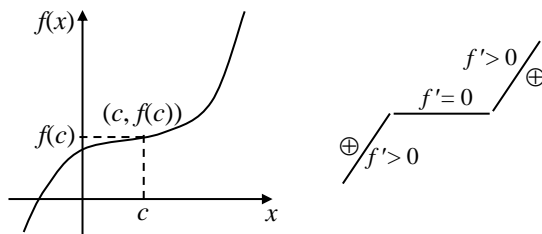
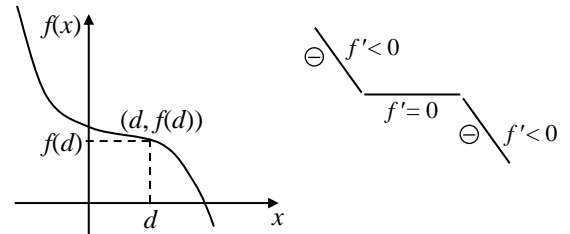
Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan.
Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner

Contoh 1

Tentukan nilai dan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 8$.

Penyelesaian:

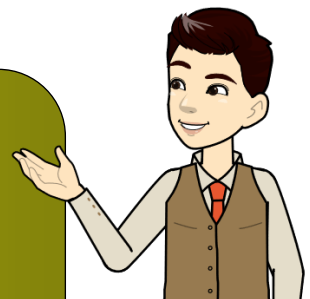
- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = x^3 - 12x + 8$, maka
  $f'(x) = 3x^2 - 12$
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0$
  $\Leftrightarrow 3(x^2 - 4) = 0$
  $\Leftrightarrow 3(x + 2)(x - 2) = 0$
  $\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 2$
- Menentukan nilai stasioner
  $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = 24$
  $x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^3 - 12(2) + 8 = -8$
- Kesimpulan
  - Nilai stasionernya adalah -8 dan 24
  - Titik stasionernya $(2, -8)$ dan $(-2, 24)$

Menentukan Titik Maksimum dan Titik Minimum

Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.

Titik Balik Maksimum

Titik Balik Minimum

Titik Belok Naik

Titik Belok Turun

Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Sifat 1

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horizontal.

Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Tentukan titik balik maksimum dan minimum dari fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama

  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

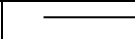
  $f'(x) = x^2 + x - 6$

- Syarat titik stasioner

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

  $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x + 3 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -3$

- Menentukan titik stasioner

  $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 = -7\frac{1}{3}$

  $x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 = 13\frac{1}{2}$

  Jadi, ada dua titik stasioner, yaitu $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$ dengan nilai stasionernya $-7\frac{1}{3}$ dan $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$ dengan nilai stasionernya $13\frac{1}{2}$.

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

X	$x < -3$	-3	$-3 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
gradien	/	—	\	—	/
		↑ ***maksimum***		↑ ***minimum***	

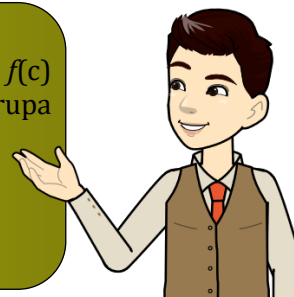
- Kesimpulan
  - $f(-3) = 13\frac{1}{2}$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif) dan titik balik maksimumnya adalah $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$
  - $f(2) = -7\frac{1}{3}$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif) dan titik balik minimum adalah $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$.

Nilai Maksimum dan Minimum suatu Fungsi pada Interval Tertutup [a, b]

Biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan akan mempunyai interval $I = [a, b]$ sebagai daerah asalnya. Nilai-nilai ekstrem sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup sering kali terjadi pada titik-titik ujung interval.

Sifat 2

Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:

- titik ujung dari I
- titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$)
- titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada)

Tahapan menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ adalah sebagai berikut.

1) Selesaikan $f'(x)$
2) Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[a, b]$, yaitu
   a) Titik ujung interval, $x = a$ dan $x = b$
   b) Titik stasioner $c \in [a, b]$, dengan $f'(c) = 0$
   c) Titik singular $d \in [a, b]$, dengan $f'(d)$ tidak ada
3) Hitung nilai fungsi $f(x)$ pada semua titik kritis yang diperoleh pada langkah 2). Nilai terbesar dan terkecil yang dihasilkan merupakan nilai maksimum dan minimum fungsi f.

Contoh 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 1$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, maka
  $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$
  $= 6(2x^2 - x - 1)$
  $= 6(x + 1)(2x - 1)$
- Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[-2, 1]$, yaitu
  1. Titik ujung interval, $x = -2$ dan $x = 1$
  2. Titik stasioner
     $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 1)(2x - 1) = 0$
     $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = \frac{1}{2}$
  3. Tidak ada titik singular
- Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
$x = -2$	$f(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 1 = -7$
$x = -1$	$f(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{3}{4}$
$x = 1$	$f(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 6(1) + 1 = 2$

- Kesimpulan
  - $f(-2) = -7$ merupakan nilai minimum
  - $f(-1) = 6$ merupakan nilai maksimum.

Maksimum dan Minimum pada Masalah Kontekstual

Dalam hidup ini, kita sering menghadapai masalah guna mendapatkan jalan terbaik untuk melalkukan sesuatu. Sebagai contoh, seorang petani ingin memilih kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter akan menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya pendistribusian produknya. Kadangkala salah satu dari masalah di atas dapat dirumuskan sehingga akan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tertentu.

Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.

- ❖ Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
- ❖ Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
- ❖ Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
- ❖ Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

Berikut diberikan beberapa contoh maksimum dan minimum pada masalah kontekstual.

Contoh 4

Akan dibuat sebuah persegi panjang dengan keliling 48 cm. Berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum ?

Penyelesaian :

$K = 2(p + l) = 48 \Rightarrow p + l = 24$

$\Rightarrow l = 24 - p$ .... (*)

Luas persegi panjang :

$L = p \,.\, l$

$= p \,.\, (24 - p)$

$= 24p - p^2$

$\frac{dL}{dp} = 24 - 2p$

Syarat ekstrim untuk L adalah $\frac{dL}{dp} = 0$, sehingga :

$24 - 2p = 0$

$2p = 24$

$p = 12$

Substitusikan $p = 12$ ke (*), sehingga diperoleh : $l = 24 - 12 = 12$.

Jadi, ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum adalah $p = 12$ cm, $l = 12$ cm, dan luas persegi panjang = 12 . 12 = 144 cm^2.

Contoh 5

Jumlah dua buah bilangan adalah 10. Tentukan kedua bilangan tersebut sehingga jumlah kuadratnya paling minimum.

Penyelesaian :

Misalkan bilangan pertama = x dan bilangan kedua = y

Jumlah kedua bilangan 10, sehingga $x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$ .... (*)

Misalkan jumlah kuadrat kedua bilangan = B, maka :

$B = x^2 + y^2$ .... (**)

Substitusikan persamaan (*) ke (**), sehingga diperoleh :
$B = x^2 + (10 - x)^2$
$B = x^2 + (100 - 20x + x^2) = 2x^2 - 20x + 100$
$\frac{dB}{dx} = 4x - 20$

syarat ekstrim untuk B adalah $\frac{dB}{dx} = 0$,
sehingga : $4x - 20 = 0$
$\rightarrow 4x = 20$
$\rightarrow x = 5$
substitusikan $x = 5$ ke (*) sehingga diperoleh : $y = 10 - 5 = 5$
Jadi, kedua bilangan tersebut agar jumlah kuadratnya minimum adalah
5 dan 5.

Contoh 6

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Tinggi h meter setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 120t - 5t^2$, tentukanlah tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut.

Penyelesaian :

Tinggi peluru : $h(t) = 120t - 5t^2$ .... (*)
$h'(t) = 120 - 10t$
peluru mencapai tinggi maksimum jika $h'(t) = 0$, sehingga :

$$120 - 10t = 0 \Leftrightarrow 120 = 10t \Leftrightarrow t = \frac{120}{10} = 10 \text{ detik}$$

Substitusikan $t = 10$ detik ke (*), sehingga diperoleh tinggi maksimum peluru :
$h(10) = 120(10) - 5(10)^2 = 1200 - 500 = 700$ meter.

Contoh 7

Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari bahan seng dengan kapasitas 36 dm^3. Jika ukuran panjang kotak dua kali lebarnya, tentukanlah ukuran kotak agar bahan yang dibutuhkan seminimum mungkin.

Penyelesaian :

Misalkan panjang = p, lebar = l, dan tinggi = t.
Panjang kotak dua kali lebarnya, berarti $p = 2l$ .... (*)
Volume kotak = 36 dm^3

$$p \cdot l \cdot t = 36 \rightarrow (2l) \cdot l \cdot t = 36 \rightarrow t = \frac{36}{2l^2} \rightarrow t = \frac{18}{l^2} \text{ .... (**)}$$

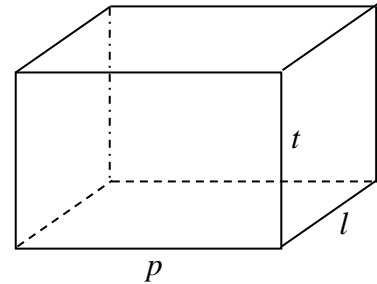
Bahan kotak akan diminimumkan, berarti yang diminimumkan adalah luas permukaan kotak tanpa tutup, disimbol dengan A.
A = luas alas + 2 luas sisi samping + 2 luas sisi depan/belakang
$A = p.l + 2\,l.t + 2\,p.\,t$ .... (***)
Substitusikan (*) dan (**) ke persamaan (***), sehingga diperoleh :

$$A = (2l).l + 2l.\left(\frac{18}{l^2}\right) + 2(2l).\left(\frac{18}{l^2}\right)$$

$$= 2l^2 + \frac{36}{l} + \frac{72}{l}$$

$= 2l^2 + \frac{108}{l}$

$\frac{dA}{dl} = 4l - 108l^{-2} = 4l - \frac{108}{l^2}$

Luas permukaan kotak minimum jika $\frac{dA}{dl} = 0$, sehingga :

$4l - \frac{108}{l^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4l = \frac{108}{l^2}$

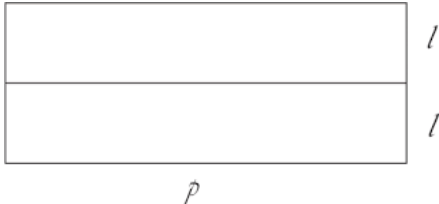
$\Leftrightarrow \quad 4l^3 = 108$

$\Leftrightarrow \quad l^3 = \frac{108}{4} = 27$

$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt[3]{27} = 3$ dm.

substitusikan $l = 3$ dm ke (*) dan (**), diperoleh : $p = 2(3) = 6$m dan

$t = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2$ dm.

Jadi, ukuran kotak agar bahan yang digunakan minimum adalah $p = 6$ dm, $l = 3$ dm, dan $t = 2$ dm.

C. Rangkuman

- Misalkan f fungsi yang yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
  - Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
  - Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner
- Misalkan f fungsi yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$
  - Jika nilai f'bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
  - Jika nilai f'bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
  - Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.
- Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika f(c) adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:
  - titik ujung dari I
  - titik stasioner dari f (f' (c) = 0)
  - titik singular dari f (f' (c) tidak ada)
- Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.
  - Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
  - Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
  - Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
  - Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

D. Latihan Soal

Pilih satu jawaban yang paling tepat.

1. Nilai stasioner dari fungsi $y = x^3 - x^2 - 8x$ diperoleh pada ....
   A. $x = 4$ dan $x = -\frac{2}{3}$
   B. $x = \frac{4}{3}$ dan $x = 2$
   C. $x = \frac{4}{3}$ dan $x = -2$
   D. $x = \frac{2}{3}$ dan $x = -4$
   E. $x = 2$ dan $x = -\frac{4}{3}$
2. Untuk $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ mempunyai nilai stasionernya sama dengan ....
   A. 2 dan 4
   B. 35
   B. 1
   C. 21 dan 87
   D. 21 dan –77
3. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ adalah ....
   A. (0, 6)
   B. (2, 12)
   C. (2, 14)
   D. (12, 2)
   E. (14, 2)
4. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan $x^2 - (a - 1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1{}^3 + 3x_1.x_2 + x_2{}^3$ dicapai untuk a = ...
   A. 1 dan 2
   B. 1 dan 3
   C. 2 dan 3
   D. 1
   E. 0 dan – 1
5. Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ mencapai ….
   A. minimum di (–1, 7)
   B. minimum di (0, 2)
   C. maksimum di (0, 2)
   D. maksimum di (–1, 7)
   E. maksimum di (3, –25)
6. Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (x_o, y_o), maka x_o = ….
   A. –1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3
7. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ dalam interval $-3 \leq x \leq 4$ adalah ….
   A. –160
   B. –155
   C. –131
   D. –99
   E. –11
8. Sebuah titik materi dengan persamaan $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (t = waktu dan s = kedudukan). Titik materi ini mempunyai kecepatan tertinggi pada saat t = ...
   A. 1

B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

9. Selisih dua bilangan adalah $4p$. Nilai terkecil dari hasil perkalian kedua bilangan itu adalah .....
A. $6p^2$
B. $4p^2$
C. $-2p^2$
D. $-4p^2$
E. $-5p^2$

10. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx - 5$ mempunyai koordinat titik balik minimum di (2, −9). Nilai a + b = ….
A. −1
B. −2
C. −3
D. −4
E. −5

11. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar dibawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah ....
A. 16 m
B. 18 m
C. 20 m
D. 22 m
E. 24 m

l
l
p

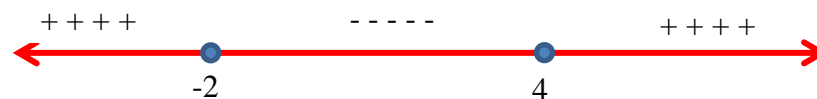
12. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam dengan biaya per jam $4x - 800 + \frac{120}{x}$ dalam ratus ribu rupiah. Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu ....
A. 40 jam
B. 100 jam
C. 110 jam
D. 120 jam
E. 150 jam

13. Luas permukaan balok dengan alas persegi adalah 150 cm^2. Agar diperoleh volume balok yang maksimum, panjang alas balok adalah ....
A. 3 cm
B. 5 cm
C. 6 cm
D. 15 cm
E. 25 cm

14. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya ($9.000 + 1.000x + 10x^2$) rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahan tersebut adalah ....
A. Rp149.000,00
B. Rp249.000,00
C. Rp391.000,00
D. Rp609.000,00
E. Rp757.000,00

15. Dua bilangan m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ....
    A. 320
    B. 295
    C. 280
    D. 260
    E. 200

Pembahasan Soal Latihan Kegiatan Pembelajaran 2

1. Nilai stasioner dari fungsi $y = x^3 - x^2 - 8x$ diperoleh pada ....
   Jawaban: E
   Penyelesaian:
   Syarat fungsi stasioner adalah $f'(x) = 0$, sehingga kita turunkan fungsi y pada soal diatas:
   $y = x^3 - x^2 - 8x$
   $y' = 0$
   $\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$ (faktorkan)
   $\Leftrightarrow (3x + 4)(x - 2) = 0$
   $\Leftrightarrow 3x + 4 = 0$ atau $x - 2 = 0$
   $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$ dan $x = 2$
2. Untuk $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ mempunyai nilai stasionernya sama dengan .....
   Jawaban: D
   Penyelesaian:
   $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$
   Nilai dan titik stasioner didapat jika $y' = 0$
   $y' = 0$
   $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0$
   $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$
   $\Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$
   $\Leftrightarrow x - 4 = 0$ atau $x + 2 = 0$
   $\Leftrightarrow x = 4$ atau $x = -2$

   Fungsi maksimum pada $x = -2$, maka nilai balik maksimumnya:
   $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 7$
   $= -8 - 12 + 48 - 7$
   $= 21$
   Fungsi minimum pada $x = 4$, maka nilai balik minimumnya:
   $f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 7$
   $= 64 - 48 - 96 - 7$
   $= -87$
   Jadi, nilai stasionernya adalah 21 dan -87.
3. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$
   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$
   syarat stasioner $f'(x) = 0$
   $\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$
   $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$
   $\Leftrightarrow (x - 2)(x - 2) = 0$
   $\Leftrightarrow x = 2$
   $x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) + 6 = 14$
   Jadi, titik stasionernya adalah (2, 14).
4. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan $x^2 - (a - 1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1^3 + 3x_1.x_2 + x_2^3$ dicapai untuk $a =$ .....
   Jawaban: B

Penyelesaian:

$x^2 - (a-1)x + a = 0$

$A = 1, B = -(a-1), C = a$

Jika akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah x_1 dan x_2 maka

$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = (a-1)$

$x_1.x_2 = \frac{C}{A} = a$

$x_1^3 + 3x_1.x_2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1.x_2$

$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2(x_1 + x_2) + 3x_1.x_2$

$= (a-1)^3 - 3a(a-1) + 3a$

$= (a-1)^3 - 3a^2 + 6a$

Stasioner jika turunan pertama = 0

Andai $p(a) = (a-1)^3 - 3a^2 + 6a$

maka $p' = 3(a-1)^2 - 6a + 6 = 0$

$(a-1)^2 - 2a + 2 = 0$

Kedua ruas dibagi 3

$a^2 - 2a + 1 - 2a + 2 = 0$

$a^2 - 4a + 3 = 0$

$(a-1)(a-3) = 0$

$a - 1 = 0$ atau $a - 3 = 0$

$a = 1$ atau $a = 3$

5. Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ mencapai ….

Jawaban: D

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, maka

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x+1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 3$

❖ Menentukan nilai stasioner

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = 7$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 2 = -25$

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f'(-2) = 15$, $f'(0) = -9$, dan $f'(4) = 15$

❖ Kesimpulan

➢ $f(-1) = 7$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)

➢ $f(3) = -25$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif).

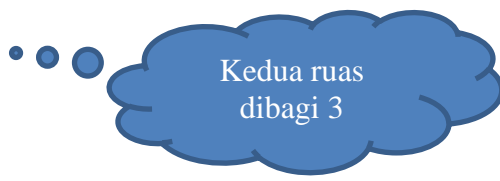
6. Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (x_o, y_o), maka x_o = ….

Jawaban: D

Penyelesaian:

$y = 2x^5 - 5x^4 + 20$, maka

$y' = 10x^4 - 20x^3$

Syarat stasioner $y' = 0$, maka

$10x^4 - 20x^3 = 0$
$\Leftrightarrow 10x^3(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$
$x = 0 \Rightarrow y = 2(0)^5 - 5(0)^4 + 20 = 20$
$x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^5 - 5(2)^4 + 20 = 4$
Jadi, kurva mencapai nilai minimum di $x_o = 2$.

7. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ dalam interval $-3 \leq x \leq 4$ adalah ....
Jawaban: B
Penyelesaian:
❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$, maka
$f'(x) = 6x^2 - 12x - 48$
$= 6(x^2 - 2x - 8)$
$= 6(x + 2)(x - 4)$
❖ Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup [–3, 4], yaitu
1. Titik ujung interval, $x = -3$ dan $x = 4$
2. Titik stasioner
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 4$
3. Tidak ada titik singular
❖ Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$
$x = -3$ $x = -2$ $x = 4$	$f(-3) = 2(-3)^3 - 6(-3)^2 - 48(-3) + 5 = 41$ $f(-2) = 2(-2)^3 - 6(-2)^2 - 48(-2) + 5 = 61$ $f(4) = 2(4)^3 - 6(4)^2 - 48(4) + 5 = -155$

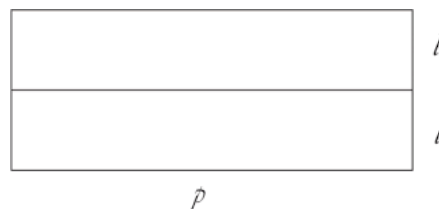
❖ Kesimpulan
➢ $f(-2) = 61$ merupakan nilai maksimum
➢ $f(4) = -155$ merupakan nilai minimum

8. Sebuah titik materi dengan persamaan $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (t = waktu dan s = kedudukan). Titik materi ini mempunyai kecepatan tertinggi pada saat t = ...
Jawaban: A
Penyelesaian:
$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$
kecepatan $v(t) = s'(t)$
$v(t) = -3t^2 + 6t - 5$
$v(t)$ maksimum diperoleh saat $v'(t) = 0$
$v'(t) = -6t + 6 = 0$
$t = 1$
Jadi, $v(t)$ maksimum diperoleh saat $t = 1$.

9. Selisih dua bilangan adalah $4p$. Nilai terkecil dari hasil perkalian kedua bilangan itu adalah .....
Jawaban: D
Penyelesaian:
Misalkan dua bilangan itu adalah x dan y, maka:
$x - y = 4p$
$y = x - 4p$
Perkalian bilangan tersebut
$z = xy$
$= x(x - 4p)$
$= x^2 - 4xp$
Perkalian tersebut akan minimum jika turunan pertama dari $z = x^2 - 4xp$ sama dengan nol.
$z = x^2 - 4xp$

$z' = 2x - 4p = 0$
$2x = 4p$
$x = 2p$
Untuk $x = 2p$ maka $y = 2p - 4p = -2p$, sehingga hasil perkalian minimumnya adalah:
$z = xy = 2p(-2p) = -4p^2$

10. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx - 5$ mempunyai koordinat titik balik minimum di (2, −9). Nilai a+b = ...
Jawaban: C
Penyelesaian:
Substitusi titik (2, −9)=(x, y) ke fungsi $f(x)$
$f(x) = ax^2 + bx - 5$
$-9 = a(2)^2 + b(2) - 5$
$4a + 2b = -4$ (1)
$f'(x) = 2ax + b$
Karena f mencapai nilai balik minimum di $x = 2$, maka :
$f'(2) = 0$
$2a(2) + b = 0$
$4a + b = 0$ (2)
Eliminasi (1) dan (2) diperoleh
$4a + 2b = -4$
$4a + b = 0$
dikurangi
$b = -4$
Untuk $b = -4$ maka $4a + (-4) = 0$
$4a = 4$
$a = 1$
Jadi, $a + b = 1 + (-4) = -3$

11. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar dibawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah ....
Jawaban: C
Penyelesaian:

Persamaan kerangka :
$3p + 4l = 120$
$4l = 120 - 3p$ (masing-masing dibagi 4)
$l = 30 - \frac{3}{4}p$
Persamaan luas :
$L = p \times 2l$
$= p \times 2\,(30 - \frac{3}{4}p)$
$= 60p - \frac{3}{2}p^2$
Luas akan maksimum jika :
$L' = 0$
$60 - 3p = 0$
$60 = 3p$
$3p = 60$
$p = 20$
Jadi, panjang kerangka agar luas maksimum adalah 20 m.

12. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam dengan biaya per jam $4x - 800 + \frac{120}{x}$ dalam ratus ribu rupiah. Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu ....

Jawaban: B

Penyelesaian:

Biaya per jam : $4x - 800 + \frac{120}{x}$

Biaya untuk x jam :

$B(x) = x(4x - 800 + \frac{120}{x})$

$= 4x^2 - 800x + 120$

Dikali x

Biaya akan minimum jika :

$B'(x) = 0$

$8x - 800 = 0$

$x = 100$

Jadi, waktu yang diperlukan agar biaya minimum adalah 100 jam.

13. Luas permukaan balok dengan alas persegi adalah 150 cm². Agar diperoleh volume balok yang maksimum, panjang alas balok adalah ....

Jawaban: B

Penyelesaian:

Misal p = panjang balok, l = lebar balok, dan t = tinggi balok, L = luas permukaan balok, dan V = volume balok

Karena alas berbentuk persegi, maka $p = l$

$L = 150$

$2(pl + pt + lt) = 150$

$pl + pt + lt = 75$

$p^2 + pt + pt = 75$ (karena $p = l$)

$2pt = 75 - p^2$

$t = \frac{75-p^2}{2p}$

$$V = plt$$
$$= p^2 t \quad \text{(karena } p = l\text{)}$$
$$= p^2\left(\frac{75 - p^2}{2p}\right)$$
$$= \frac{75p^2 - p^4}{2p}$$
$$= \frac{75}{2}p - \frac{1}{2}p^3$$

Volume akan maksimum jika $V' = 0$, diperoleh

$$\frac{75}{2} - \frac{3}{2}p^2 = 0$$

$75 - 3p^2 = 0$

$3p^2 = 75$

$p^2 = 25$

$p = 5$

Jadi, volume akan maksimum jika panjang alas balok 5 cm.

14. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya $(9.000 + 1.000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah ....

Jawaban: C

Penyelesaian:

Biaya produksi x produk adalah $9.000 + 1.000x + 10x^2$

Biaya penjualan 1 produk adalah 5.000

Jadi, biaya penjualan x produk adalah $5.000x$

Laba = Biaya penjualan − Biaya produksi

$L(x) = 5.000x - (9.000 + 1.000x + 10x^2)$

$= 5.000x - 9.000 - 1.000x - 10x^2$
$= -10x^2 + 4.000x - 9.000$

Laba akan maksimum, jika :
$L'(x) = 0$
$-20x + 4.000 = 0$
$x = 200$

Jadi, laba akan maksimum jika perusahaan menghasilkan 200 produk, dengan laba maksimumnya adalah :

$L(200) = -10(200)^2 + 4.000(200) - 9.000$
$= -400.000 + 800.000 - 9.000$
$= 391.000$

15. Dua bilangan m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ....
    Jawaban: A
    Penyelesaian:
    Diketahui $2m - n = 40$
    $n = 2m - 40$
    $p = m^2 + n^2$
    $= m^2 + (2m - 40)^2$
    $= m^2 + 4m^2 - 160m + 1600$
    $= 5m^2 - 160m + 1600$
    p akan minimum jika :
    $p' = 0$
    $10m - 160 = 0$
    $m = 16$
    $n = 2m - 40$
    $= 2(16) - 40$
    $= -8$
    Jadi, nilai minimum p adalah
    $p = m^2 + n^2$
    $= 16^2 + (-8)^2$
    $= 320$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai dan titik stasioner fungsi aljabar ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi aljabar dengan uji turunan pertama?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi aljabar pada interval tertutup?		
4.	Apakah Ananda mampu membuat model dari permasalahan kontekstual atau dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan maksimum dan minimum?		
5.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan permasalahan kontekstual atau dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan maksimum dan minimum?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini, diharapkan Ananda dapat menggambar grafik fungsi Aljabar.

B. Uraian Materi

Dengan materi prasyarat yang mencukupi yaitu menentukan turunan pertama dari suatu fungsi yang diberikan, fungsi naik, fungsi turun dan stasioner, Ananda dapat memulai modul tersebut.

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi aljabar:

- ❖ Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
  - a. Titik potong dengan sumbu–x, syarat $y = 0$
  - b. Titik potong dengan sumbu–y, syarat $x = 0$
- ❖ Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- ❖ Tentukan selang tempat fungsi naik atau turun.
- ❖ Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

Contoh

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$.

Penyelesaian :

1. Titik-titik potong terhadap :

   a. sumbu x, syarat $y = 0$, maka : $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow$

$$x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 8\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } \frac{1}{3}x^2 - x - 8 = 0 \text{ (dikali 3)}$$

$$x = 0 \text{ atau } x^2 - 3x - 24 = 0$$

Pake rumus kuadrat

Diketahui : $a = 1$, $b = -3$, $c = -24$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-24)}}{2\ (1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 96}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 10,25}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 10,25}{2} = \frac{13,25}{2} = 6,625$$

$$x_2 = \frac{3 - 10,25}{2} = \frac{-7,05}{2} = -3,525$$

$x = 0$ atau $x = 6,62$ atau $x = -3,62$

Jadi diperoleh titik potong (0, 0), (6,62; 0), dan (–3,62; 0)

b. sumbu y, syarat $x = 0$, maka : $y = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 8(0) = 0$ diperoleh titik (0, 0)

2. Titik-titik stasioner ($f'(x) = 0$)

   $f'(x) = x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 4) = 0$

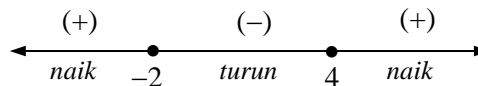
   sehingga absis titik stasioner $x = -2$ dan $x = 4$

   untuk $x = -2$, maka $y = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 8(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 16 = 9\frac{1}{3}$

   untuk $x = 4$, maka $y = f(4) = \frac{1}{3}(4)^3 - (4)^2 - 8(4) = \frac{64}{3} - 16 - 32 = -26\frac{2}{3}$

   Jenis stasioner :

   (+) (–) (+)

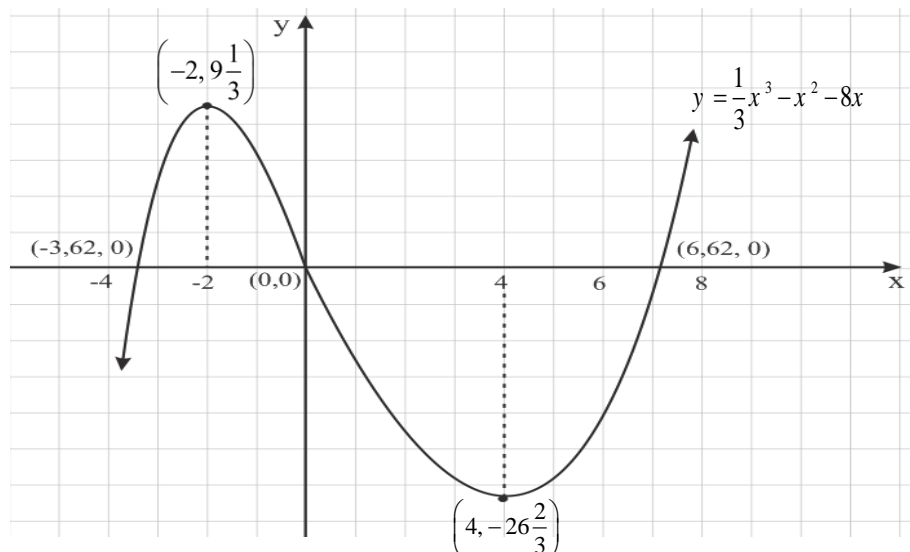
   naik –2 *turun* 4 *naik*

   Untuk $x = -2$, terdapat titik balik maksimum, yaitu $\left(-2, 9\frac{1}{3}\right)$, dan

   Untuk $x = 4$, terdapat titik balik minimum, yaitu $\left(4, -26\frac{2}{3}\right)$

3. $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 4$

   $f(x)$ turun pada interval $-2 < x < 4$

4. Jika diperlukan, tentukan dua titik lagi. Misalnya, $x = 7$ (di sebelah kanan titik potong) dan $x = -4$ (di sebelah kiri titik potong).

5. Gambarkan semua titik yang diperoleh dari hasil perhitungan di atas pada bidang cartesius, kemudian hubungkan semua titik-titik tersebut sehingga diperoleh kurva berikut.

C. Rangkuman

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi suku banyak :

- Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
  - Titik potong dengan sumbu – x, syarat $y = 0$
  - Titik potong dengan sumbu – y, syarat $x = 0$
- Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- Tentukan selang tempat *fungsi* naik atau turun.
- Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

D. Latihan Soal

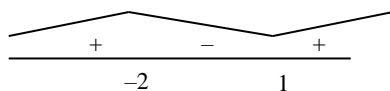
Sebagai latihan Ananda, coba gambarlah sketsa grafik : (Gunakan langkah-langkah sesuai contoh soal yaa)

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$
2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$

Penyelesaian:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **(skor 50)**

- Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.
  - Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$
    $y = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 12(0) + 7 = 7 \Rightarrow (0, 7)$
  - Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$
    $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$
    $\Leftrightarrow (2x + 7)(x - 1)^2 = 0$
    $\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$ atau $x = 1$
    $\Rightarrow (-\frac{7}{2}, 0)$ dan $(1, 0)$
- Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.
  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$
  $\Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 1) = 0$
  $\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 1$

  + – +
  –2 1

  Jadi, fungsi naik pada interval $x < -2$ atau $x > 1$

  dan turun pada interval $-2 < x < 1$.
- Tentukan titik-titik kritis.

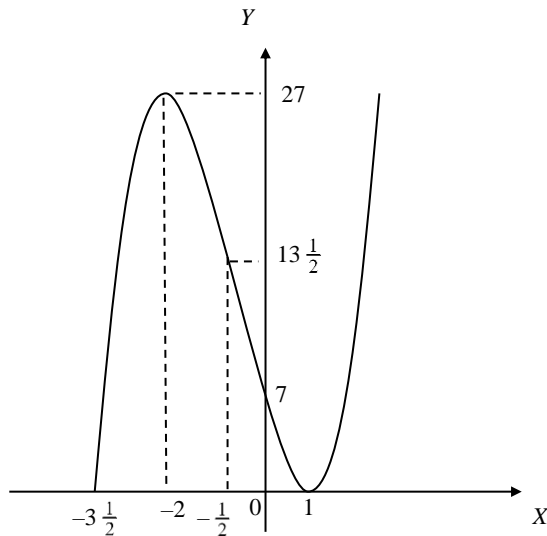
  $x = -2 \Rightarrow y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 7 = 27$

  $x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 7 = 0$

  Jadi, titik balik minimum (1, 0) dan titik balik maksimum (–2, 27)
- Tentukan beberapa titik bantu lainya

  $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) + 7 = 20 \Rightarrow (-1, 20)$

  $x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) + 7 = 11 \Rightarrow (2, 11)$

❖ Sketsa grafik.

2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$ **(skor 50)**

❖ Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

➢ Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$

$y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8 \Rightarrow (0, 8)$

➢ Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$

$8 + 2x^2 - x^4 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ atau $x^2 = -2$ (tidak memenuhi)

$x = -2$ atau $x = 2$

$\Rightarrow (-2, 0)$ dan $(2, 0)$

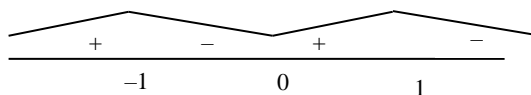
❖ Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 4x^3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - x)(1 + x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 0$ atau $x = 1$

+	–	+	–
	−1	0	1

Jadi, fungsi naik pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$

dan turun pada interval $-1 < x < 0$ atau $x > 1$.

❖ Tentukan titik-titik kritis.

$x = -1 \Rightarrow y = 8 + 2(-1)^2 - (-1)^4 = 9$

$x = 0 \Rightarrow y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8$

$x = 1 \Rightarrow y = 8 + 2(1)^2 - (1)^4 = 9$

Jadi, titik balik miksimum $(-1, 9)$ dan $(1, 9)$ dan titik balik minimum $(0, 8)$

❖ Tentukan beberapa titik bantu lainya

$x = -3 \Rightarrow y = 8 + 2(-3)^2 - (-3)^4 = \Rightarrow (-3, -55)$

$x = 3 \Rightarrow y = 8 + 2(3)^2 - (3)^4 = \Rightarrow (3, -55)$

❖ Sketsa grafik.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menggambar grafik fungsi Aljabar dengan menggunakan langkah-langkah yang telah ditulis?		
2.	Apakah Ananda mampu menggambar grafik fungsi Aljabar ke dalam grafik cartesius?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ di titik (1, 4) adalah ….
   A. -3
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 3
2. Persamaan garis singgung kurva $y = x\sqrt{2x}$ dititik pada kurva dengan absis 2 adalah ....
   A. $y = 3x - 2$
   B. $y = 3x + 2$
   C. $y = 3x - 1$
   D. $y = -3x + 2$
   E. $y = -3x + 1$
3. Garis singgung pada kurva $y = \dfrac{2x+1}{2-3x}$ di titik (1, –3) adalah ….
   A. $y + 7x - 10 = 0$
   B. $y - 7x + 10 = 0$
   C. $7y + x + 20 = 0$
   D. $7y - x - 20 = 0$
   E. $7y - x + 20 = 0$
4. Koorditan titik-titik singgung pada kurva $y = x^2\,(2x - 3)$ yang garis singgungnya sejajar dengan garis $2y - 24x = 1$ adalah ….
   A. (1, 5) dan (–2, –4)
   B. (–1, 5) dan (–2, –4)
   C. (–1, –5) dan (2, 4)
   D. (1, –5) dan (2, 4)
   E. (1, 5) dan (2, 4)
5. Kurva $y = 2x^2 - 3x + 3$ bersinggungan dengan garis $y = 5x - 5$. Persamaan garis normalnya adalah ….
   A. $5x - y = 0$
   B. $x - 5y - 1 = 0$
   C. $x + 5y - 1 = 0$
   D. $x - 5y + 23 = 0$
   E. $x + 5y - 27 = 0$
6. Fungsi $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ akan naik pada interval ....
   A. $x > 2$
   B. $x > 3$
   C. $x > 4$
   D. $x < 2$
   E. $x < 4$
7. Batas nilai p agar fungsi $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 2px + 5$ selalu turun untuk semua nilai x bilangan real adalah ….
   A. $p < -2$ atau $p > 0$
   B. $-2 \le p \le 0$
   C. $-2 < p < 0$
   D. $-2 \le p < 0$
   E. $-2 < p \le 0$

8. Grafik fungsi $f(x) = x\sqrt{x-2}$ naik untuk nilai x yang memenuhi ….
   A. $2 < x < 3$
   B. $3 < x < 4$
   C. $2 < x < 4$
   D. $x > 4$
   E. $x > 2$
9. Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ turun pada interval ….
   A. $-2 < x < 2$
   B. $0 < x < 4$
   B. $2 < x < 6$
   C. $-4 < x < 0$
   D. $4 < x < 8$
10. Agar grafik fungsi $y = x^3 - 3x^2 - ax$ naik hanya pada interval $x < -2$ atau $x > 4$, maka nilai a harus sama dengan ….
   A. 48
   B. 24
   C. 12
   D. 8
   E. 4
11. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$ adalah ....
   A. (3, 4)
   B. (3, –4)
   C. (–3, 4)
   D. (–3, –4)
   E. (0, 5)
12. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ adalah ....
   A. 15 dan 17
   B. 15 dan – 17
   C. 15 dan 17
   D. 15 dan - 17
   E. 15
13. Koordinat titik stasioner dari fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ adalah ....
   A. (1, –1) dan (3, 5)
   B. (1, –1) dan (3, –5)
   C. (1, 1) dan (3, 5)
   D. (1, –1) dan (–3,5)
   E. (1, –1) dam (3, –5)
14. Fungsi $y = ax^3 + bx^2$ dengan a dan b konstan. Jika nilai stasioner di $x = 1$ adalah -1, maka nilai nilai $a - b$ adalah ....
   A. 2
   B. 3
   C. 4
   D. 5
   E. 6
15. Fungsi $f(x) = x^3 + px^2 + 9x - 18$ mempunyai nilai stasioner untuk $x = 3$. Nilai $p =$ ….
   A. –6
   B. –4
   C. –3
   D. 4
   E. 6
16. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka $p =$ ….
   A. 3

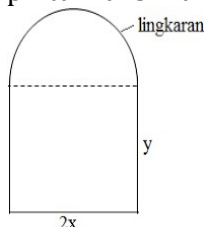
B. 4
C. 5
D. 7
E. 8

17. Diketahui fungsi f yang dirumuskan sebagai $f(x) = x^3 - 12x^2$. Nilai maksimum fungsi f dalam interval $-1 \leq x \leq 5$ adalah ….
A. –175
B. –128
C. –13
D. 0
E. 128

18. Sebidang tanah akan dibatasi oleh pagar dengan menggunakan kawat berduri seperti pada gambar. Batas tanah yang dibatasi pagar adalah yang tidak bertembok. Kawat yang tersedia 800 meter. Berapakah luas maksimum yang dapat dibatasi oleh pagar yang tersedia?
A. 80.000 m^2
B. 40.000 m^2
C. 20.000 m^2
D. 5.000 m^2
E. 2.000 m^2

19. Sebuah tabung tanpa tutup yang terbuat dari lempengan tipis dapat memuat air sebanyak 27π cm^2. Luas permukaan tabung akan minimum jika jari-jari tabung sama dengan ....
A. 9 cm
B. 8 cm
C. 6 cm
D. 4 cm
E. 3 cm

20. Sebuah akuarium tanpa tutup memiliki alas berbentuk persegi panjang dengan perbandingan panjang dan lebarnya 2 : 3. Jika luas permukaan akuarium adalah 1.800 cm^2, volume maksimum akuarium tersebut adalah ....
A. 3.600 cm^3
B. 5.400 cm^3
C. 6.300 cm^3
D. 7.200 cm^3
E. 8.100 cm^3

21. Sebuah pintu berbentuk seperti tergambar. Keliling pintu sama dengan p. Agar luas pintu maksimum, maka x sama dengan ....

A. $\frac{p}{4+\pi}$
B. $\frac{p}{4-\pi}$
C. p
D. $4 - x$
E. $4 - p$

22. Kebun Pak Jaya berbentuk persegi panjang dengan keliling 60 meter. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter, maka luas maksimum kebun Pak Jaya adalah ….
A. 120

B. 150
C. 225
D. 250
E. 300

23. Selembar karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 dm dan panjang 8 dm akan dibuat kotak tanpa tutup. Pada keempat pojok karton dipotong persegi yang sisinya x dm. Ukuran kotak tersebut (panjang, lebar, tinggi) agar volume maksimum berturut-turut adalah ....
    A. 10 dm, 7 dm, 1 dm
    B. 8 dm , 5 dm, 1 dm
    C. 7 dm, 4 dm, 2 dm
    D. 7 dm, 4 dm, 1 dm
    E. 6 dm, 3 dm, 1 dm
24. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal V_o m/detik. Tinggi peluru setelah t detik dinyatakan dengan fungsi $h(t) = 100 + 40t - 4t^2$. Tinggi masksimum yang dapat dicapai peluru tersebut adalah ....
    A. 160 m
    B. 200 m
    C. 340 m
    D. 400 m
    E. 800 m
25. Seorang petani menyemprotkan obat pembasmi hama pada tanamannya. Reaksi obat tersebut t jam setelah disemprotkan dinyatakan dengan rumus $f(t)=15t^2 - t^3$. Reaksi maksimum tercapai setelah ....
    A. 3 jam
    B. 5 jam
    C. 10 jam
    D. 15 jam
    E. 30 jam

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. A
3. B
4. C
5. E
6. A
7. C
8. E
9. B
10. B
11. B
12. B
13. E
14. D
15. A
16. D
17. D
18. D
19. E
20. D
21. A
22. C
23. E
24. B
25. C

DAFTAR PUSTAKA

Manullang, Sudianto, dkk. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Siswanto. 2005. *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Sobirin. 2008. *Fokus Matematika Siap Ujian Nasional untuk SMA/MA*. Jakarta: Erlangga.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Willa Adrian. 2008. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://soalkimia.com/contoh-soal-aplikasi-turunan/

https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-aplikasi-turunan-diferensial/

https://smatika.blogspot.com/2016/10/pembahasan-soal-ujian-nasional-aplikasi.html

https://www.materimatematika.com/2017/10/fungsi-naik-dan-fungsi-turun.html

https://rumusbilangan.com/titik-stasioner/

https://www.madematika.net/2017/02/menentukan-nilai-stasioner-suatu-fungsi.html

http://ilmuku-duniaku14.blogspot.com/2018/07/soal-dan-pembahasan-menentukan-titik.html